尺寸的概念是分形几何的核心.分形维数扩展到各种类型的集合,这些概念在一维是直线或平滑曲线,在二维是平面,依此类推.粗略地,维以某种方式指示集合在其每个点附近占据多少空间.大多数维度定义的基础是“按𝛿度量集合”的概念.对于每个𝛿,我们以检测delta 𝛿大小不规则性的方式来测量集合,然后我们看到这些测度如何表现为𝛿→0.

2.1 盒计数维度[box-counting dimensions]

本章主要涉及盒计数维度,它具有简单直观的表示方式,是使用最广泛的维度之一.该定义至少可以追溯到1930年代,其受欢迎程度很大程度上是由于其数学计算和经验估算相对容易.

给定平面的子集,对于每个,我们找到直径最大为的集合的最小数量使得这些集合覆盖,表示为可分割成大小为的“块”的数量.的维数反映了随𝛿→增大.如果服从上述规则,则近似幂定律

对正常数和,我们说具有盒计数维度.(使用该名称的原因很快就会明白.)为了求解,我们采用对数

因此

我们可能希望为

第二项在极限中消失了.

这驱动了盒计数维度的正式定义.回想一下,如果是维欧氏空间的任何非空子集,则的直径定义为,即中任何一对点之间的最大距离.如果是覆盖的直径最大为𝛿的可数或有限集的集合,即和,我们说是的𝛿-覆盖.令是任意非空有界子集,令是最多𝛿个直径集的最小集合,它可以覆盖F,即F的任何𝛿封面中集合的最少数目.F的下界和上界盒计数维度分别定义为

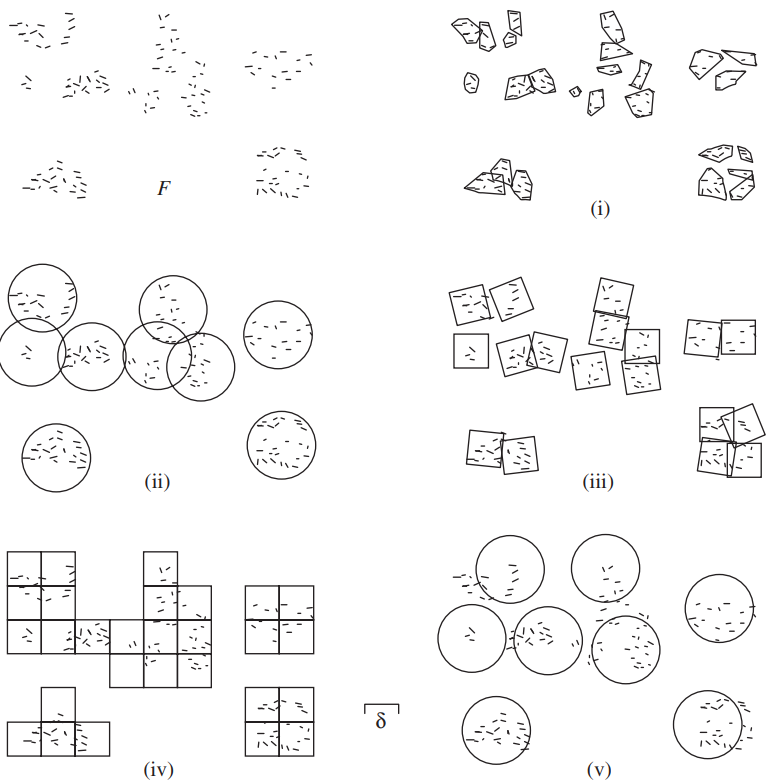
当然,,如果相等,我们将共同值称为F的盒计数或盒计数维度

在整本书中,我们假设足够小,以确保和类似量严格为正.为了避免“”或“”的问题，我们通常只考虑非空有界集的盒计数维度，并在发展盒计数维度的一般理论时进行此假设.

粗略地讲,(2.4)表示对于小𝛿,,其中,或更准确地说,(**下面两个公式没看懂**)

盒计数维度有几个等效的定义,有时使用起来更方便.如果在中取为半径为𝛿的球的最小数目,或覆盖F的边的立方的最小数目,或者甚至是半径为的不相交球的中心为F最大数,则我们得到的值完全相同.此外，还有“盒计数”方法本身.立方体的形式

其中是整数,称为的𝛿网格[mesh]或𝛿格子[gird].(回想一下,“立方体”是一个区间,在是一个正方形.)然后将作为“𝛿盒计数”,即与F相交的𝛿网格立方体的数量.



**图2.1** 找到F的盒子尺寸的五种方法;请参阅等效定义2.1.数被认为是:(1)直径为𝛿的集合覆盖F的最小数量;(2)半径为𝛿的最接近小球集合覆盖F的最小数量;(3)边长为𝛿的立方体覆盖F的最小数量;(4)与F相交的𝛿网格的数量;(5)以F为中心的最大半径为𝛿的不连续球的最大数量.

**等价定义2.1** 子集F的下界和上界盒计数维度分别定义为

并且F的盒计数维度定义为

(如果该极限存在),其中可以是下列任意之一:

1. 直径为𝛿的集合覆盖F的最小数量;
2. 半径为𝛿的最接近小球集合覆盖F的最小数量;
3. 边长为𝛿的立方体覆盖F的最小数量;
4. 与F相交的𝛿网格的数量;
5. 以F为中心的最大半径为𝛿的不连续球的最大数量.

**证明过程需要理解**.

请注意，等效定义(1)和(4)的一个结果是,盒计数公式(4)与为𝛿网格选择的原点和方向无关.

等效定义的清单可以进一步扩展;实际上,人们采用最适合特定应用的定义.盒计数维度已被不同地称为Kolmogorov熵,熵维度,容量维度(鉴于潜在的理论联系最好避免使用的术语),度量维度,对数密度和信息维度.

盒计数公式(4)在经验上被广泛使用.为了找到平面集合F的盒计数维度,我们绘制一个边长𝛿正方形的网格,并为给定𝛿值范围集合计算与F重叠的数字.假设关系为(2.1),则维度由对数的图像相对于的梯度(公式(2.7))给出.“真实的”分形(例如海岸线或蕨类)仅在有限的比例尺范围内显示分形,但盒计数仍可以给出在该范围内有意义的“维度”.

值得注意的是,在（2.5）-（2.7）中考虑极限就足够了,因为在任何递减序列中𝛿趋于0,对于某些常数,特别是,使得.要了解这一点,请注意,如果,则在的情况下,F的𝛿覆盖中的集合数量的最小值为,

并且

相反的不平等是微不足道的;下限的情况可以用相同的方式处理.

现在我们给出一些盒计数维度计算的基本例子.通常,它们涉及分别找到下界和上界,每个范围取决于几何观察,然后是涉及取对数并传递到极限的分析阶段.这是分形几何参数的典型代表,通常具有几何和分析成分.

2020年5月22日14点40分

**例题2.2** 计算中间三分康托集的维度，注意解题过程,证明过程中后半段细节需要研究

**例题2.3** 计算Sierpinski 三角形集的维度，注意解题过程,证明过程中后半段细节需要研究

存在另一种形式与盒维度有相同定义,通常很有用.回顾的子集的领域

也就是说,在F的距离内的点集.我们考虑的维体积,即维Lebesgue测度以收缩的速率.在中,如果F是一段长度为的线段,则是“香肠样”的,且;如果F是面积为的平面集,则是本质上是F的厚度,具有，并且如果是体积的实心球,则是稍微增大的球,其中.在每一种情况下,,其中整数是的维数,因此𝛿的指数表示维数.的系数是F的长度,面积或体积的测度.

这个想法扩展到分形维数.如果F是的子集,并且对于某些和,则将视为维是有意义的,事实证明只是盒计数维度.数称为的维Minkowski容–该量在某些概念中有用,但缺点是对于许多标准分形不存在,并且不一定在不相交的子集上累加,即不是一种测度.即使不存在此限制,我们也可以采用下限和上限,这些上下限与盒维度有关.

命题2.4

如果F是的子集,则

其中是的领域.(**证明过程需要看懂**)

在命题2.4的上下文中,盒维度有时称为Minkowski维度或Minkowski-Bouligand维度.

令人惊讶的是,的紧凑子集的盒维度仅取决于其补区间的长度,而不取决于它们的相对位置.的确,如果是的一个紧致子集,且,那么除两个无界区间的两个端点外,F的补集由长度为可数开放区间序列组成,然后

表明该极限存在.稍后在命题9.16中将证明这一点.

例如,对于中间三分康托集,当时,,因此

因此.

2.2 盒计数维度的属性和问题 2020年5月22日15点44分

我们列出了盒维度可以满足的许多基本属性.

**单调性**.如果,则和.这是根据维度的定义得出的,注意到所有𝛿均满足.

**值范围**.对于F是的一个非空有界子集,

前两个不等号是显而易见的.对于第三个,F可以被封装在一个大的立方体中,因此通过对某个常数计数网格平方来计算.

**有限的稳定性**.是有限稳定的,也就是说,

可以看到,两边除以并取上界极限即可得出.由于,出现了相反的不等式.请注意,对应的恒等式不适用于,对于集合的无穷并集也不适用.

**开集**.如果是开集,则.由于F包含立方体C,所以,其中c独立于𝛿.

**有限集**.如果F是非空且有限的,则,因为如果包含个不同的点,则对于所有足够小的𝛿,.

**平滑集.**如果F是的平滑(即连续可微)有界维子流形(即维表面),则.特别是,平滑曲线的维度为1,平滑曲面的维度为2.我们将很快对曲线进行验证.

Lipschitz映射在分形几何中起着重要作用,特别是Lipschitz映射下的集合图像的维数不超过原始集合的维.此基本属性是以下命题的内容.

**命题2.5** (证明过程需要看懂)

(a)如果且是一个Lipschitz映射,也就是

则且

(b)如果且是一个bi-Lipschitz映射,也就是

其中,则且.

盒维度遵循命题2.5的几个属性.

几何不变性.令为全等,相似或仿射变换.由于所有此类转换都是bi-Lipschitz,因此且.

平滑曲线.令为Lipschitz.则,其中是函数的图.特别是g是可微的且,其中,是某些常量.

要了解这些,注意到函数是由给定,是bi-Lipschitz,且,

根据命题2.5(b),.可微分的情况如下,因为使用均值定理,此类函数g为Lipschitz.

我们将在第7章中详细讨论的另一个结果是正交投影或集合的“阴影”.在这里,我们只考虑平面集到线上的投影.

投影.让proj表示从到通过原点的给定线上的正交投影.对于,,与的不等式相似.这是因为,如易于检查的那样,正交投影不会增加距离,即

所以proj是Lipschitz映射.

现在我们开始遇到盒数维的缺点.下一个命题首先具有吸引力,但会带来不良后果.

命题2.6

令表示的闭包(即包含的最小闭包子集).则(**证明过程需要看懂**)

以及

这样的直接结果是,如果是开放区域的密集子集,则.例如,令为0到1之间的(可数)有理数集.然后为整个区间,因此.因此,可数集与实数相比非常小,可以具有非零的盒维度.此外,被视为单点集的每个有理数的盒数维数显然为零,但是这些单例集的可数并集具有维数1.因此,通常不成立.

这严重限制了盒维数的用途-引入少量,可数的点集会对维度造成破坏.我们可能希望通过限制对封闭集合的关注来挽救某些东西,但仍然存在困难,如下面的非零维“稀疏”集合示例所示.

**例题2.7** 计算调和序列的维度